Ponadpodstawowe Ogólnopolskie Zawody Drużynowe w Rozwiązywaniu Zadań Olimpijskich

Zestaw przykładowy na I etap, 28.09.2026

Zadanie 1. Znaleźć wszystkie rzeczywiste rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} a^2 + a - 1 = b \\ b^2 + b - 1 = c \\ c^2 + c - 1 = a \end{cases}$$

Zadanie 2. Różne wielomiany P i Q o współczynnikach rzeczywistych spełniają warunek

$$P(Q(x)) = Q(P(x))$$

dla każdego x. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n wielomian

$$\underbrace{P(P(\ldots P(P}_{n}(x))\ldots)) - \underbrace{Q(Q(\ldots Q(Q}_{n}(x))\ldots))$$

jest podzielny przez wielomian $P(x) - Q(x)$.

Uwaga: Wielomian $F(x)$ jest podzielny przez wielomian $G(x)$, jeżeli istnieje taki wielomian $H(x)$, że $F(x) = G(x)H(x)$ dla każdego x.

Zadanie 3. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4.$$

Wykazać, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leqslant 2(a+b+c+d) - 4.$$

Zadanie 4. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych m, n o tej własności, że $(m+n)$-cyfrowa liczba postaci

$$\underbrace{33\ldots3}_{m}\underbrace{66\ldots6}_{n}$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 5. Znaleźć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 1$ o następującej własności: istnieje taka permutacja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ciągu $(1, 2, \ldots, n)$, że dla $k = 1, 2, \ldots, n$ suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ jest podzielna przez k.

Zadanie 6. Wykazać, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej a istnieje taka liczba całkowita $b > a$, że liczba $1+2^b+3^b$ dzieli się przez $1+2^a+3^a$.

Zadanie 7. Na przyjęciu spotkało się 99 osób. Wiadomo, że wśród każdych trzech osób można wskazać taką, która zna dwie pozostałe osoby z tej trójki. Wykazać, że pewna osoba zna wszystkie inne osoby obecne na przyjęciu.

Uwaga. Jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.

Zadanie 8. Niech x_1, x_2, …, x_n będą liczbami nieujemnymi, których suma wynosi 1. Udowodnić, że istnieją liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, dla których $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (2, 2, \ldots, 2)$ oraz

$$2 \leqslant a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant 2 + \frac{2}{3^n - 1}.$$

Zadanie 9. W kwadratowej tablicy o wymiarach $2n \times 2n$, gdzie n jest liczbą naturalną, znajduje się $4n^2$ liczb rzeczywistych o sumie równej 0 (na każdym polu tablicy jedna liczba). Wartość bezwzględna każdej z tych liczb jest nie większa od 1. Dowieść, że wartość bezwzględna sumy wszystkich liczb z pewnego rzędu (poziomego lub pionowego) nie przekracza n.

Zadanie 10. Na boku AB nierównoramiennego trójkąta ABC leżą takie punkty M i N, że $AN = AC$ oraz $BM = BC$. Prosta równoległa do BC przechodząca przez punkt M i prosta równoległa do AC przechodząca przez punkt N przecinają się w punkcie S. Wykaż, że $\angle CSM = \angle CSN$.

Zadanie 11. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o. Dwusieczne kątów DAB i ABC przecinają się w punkcie P, a dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie Q. Punkt M jest środkiem tego łuku BC okręgu o, który nie zawiera punktów D i A. Punkt N jest środkiem tego łuku DA okręgu o, który nie zawiera punktów B i C. Dowieść, że punkty P i Q leżą na prostej prostopadłej do MN.

Zadanie 12. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A, a punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki AB i AC. Proste MN oraz AD przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P, Q oraz A, R. Dowieść, że punkt D jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt PQR.

Czas trwania zawodów: 210min.
Powodzenia!